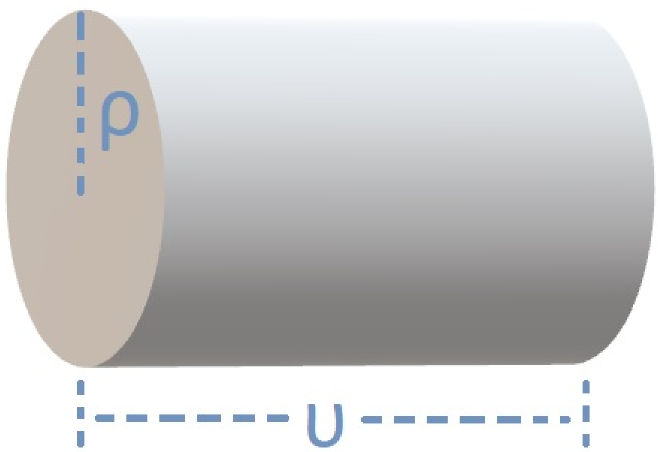
Άσκηση

Μία βιομηχανία που κατασκευάζει ηλιακούς θερμοσίφωνες θέλει να προχωρήσει στην παραγωγή ενός μοντέλου με κυλινδρικό μπόιλερ όγκου 200ℓ.

i) Ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του, ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ, ώστε να χρησιμοποιηθεί η ελάχιστη ποσότητα υλικών;

ii) Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος κατασκευής του μπόιλερ αν το κόστος κατασκευής ανά μονάδα επιφάνειας είναι 105 €$/m^2$;

iii) Να συγκριθούν οι αριθμοί $\alpha = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}}$ και $\beta = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}}$.



Απάντηση

i) Πρέπει να βρούμε τις διαστάσεις του, ώστε η συνολική του επιφάνεια

$$E = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon$$

να ελαχιστοποιείται.

Προφανώς $\upsilon > 0$ και $\rho > 0$.

Από τον όγκο του κυλίνδρου έχουμε

$V = 200 \iff \pi\rho^2\upsilon = 200 \iff \upsilon = \frac{200}{\pi\rho^2}$

και η επιφάνειά του γίνεται

$E = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon = 2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\frac{200}{\pi\rho^2} = 2\pi\rho^2 + \frac{400}{\rho}$.

Επομένως, θα μελετήσουμε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση

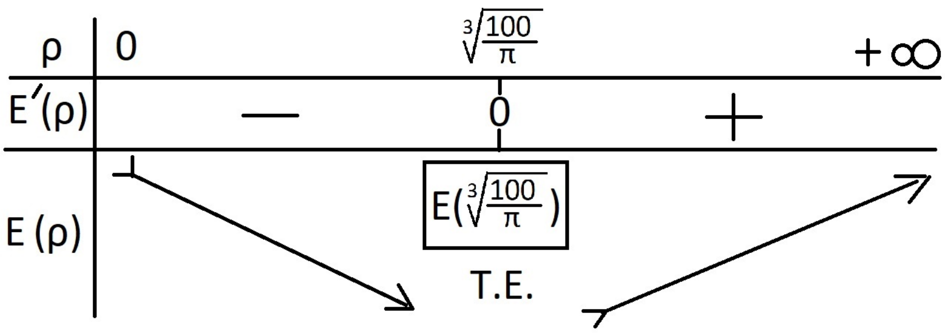
$$E(\rho) = 2\pi\rho^2 + \frac{400}{\rho}, \qquad \rho > 0.$$

Είναι

$E'(\rho) = 2\pi\left(\rho^2\right)' + 400\cdot\left(\frac{1}{\rho}\right)' = 4\pi\rho - \frac{400}{\rho^2} = \frac{4\pi\rho^3 - 400}{\rho^2} = \frac{4\left(\pi\rho^3 - 100\right)}{\rho^2}$.

$E'(\rho) = 0 \iff \pi\rho^3 - 100 = 0 \iff \pi\rho^3 = 100 \iff \rho^3 = \frac{100}{\pi} \iff \rho = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$.

$E'(\rho) > 0 \iff \pi\rho^3 - 100 > 0 \iff \pi\rho^3 > 100 \iff \rho^3 > \frac{100}{\pi} \iff \rho > \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$.



Συνεπώς, το κόστος κατασκευής του μπόιλερ ελαχιστοποιείται για $\rho = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\ dm$ και $\upsilon = \frac{200}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\right)^2}\ dm$.

<u>Σημείωση</u>: Οι μονάδες μέτρησης των ρ και υ είναι dm, επειδή τα λίτρα είναι κυβικά δεκατόμετρα $(1\ell = 1dm^3)$. Επίσης, δεν χρειάζεται να κάνουμε πράξεις για να υπολογίσουμε αριθμητικά τις ποσότητες. Τις αφήνουμε στη μορφή που βρήκαμε. Αν κάποιος θέλει με αριθμομηχανή να κάνει τις πράξεις, βγαίνει $\rho \simeq 3,169dm$ και $E(\rho) \simeq 189,322dm^2$.

ii) Η ελάχιστη επιφάνεια κατασκευής είναι $E\left(\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\right)^2 + \frac{400}{\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}}\ dm^2$. Επομένως το ελάχιστο κόστος κατασκευής είναι $\left(2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\right)^2 + \frac{400}{\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}}\right) \cdot 1,05$ €.

<u>Σημείωση</u>: Μετατρέψαμε τα τετραγωνικά μέτρα σε τετραγωνικά δεκατόμετρα $1m^2 = 100dm^2$.

iii) Παρατηρούμε ότι $\alpha = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = \frac{E\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)}{2}$ και $\beta = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right)^2 + \frac{200}{\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}} = \frac{E\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right)}{2}$.

Όμως, $\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} < \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \xLeftrightarrow{E \searrow \left(0, \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}\right)} E\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) > E\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right) \iff \frac{E\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)}{2} > \frac{E\left(\sqrt[3]{\frac{60}{\pi}}\right)}{2} \iff \alpha > \beta$.